Problème:

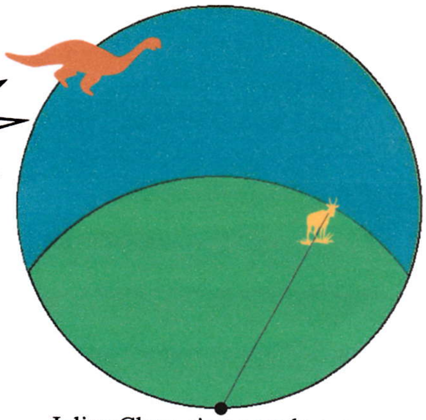
Soit un champ circulaire de rayon R.

Au bord du champ, on plante un piquet.

On attache une corde de longueur L au piquet.

Au bout de la corde, on attache une chèvre.

Calculer $L = f(R)$ pour que la chèvre puisse brouter la moitié de la surface du champ.



Julien Clerc, c'est pour le son.
La chèvre, c'est pour bouffer.
Le dinosaure, c'est pour faire joli.

Traçons un cercle de centre O et de rayon R
Traçons ses axes orthonormés Δ1 (vertical) et Δ2 (horizontal)
Soit P un point d'intersection de Δ1 et du cercle O
Soit A un point d'intersection de Δ2 et du cercle O

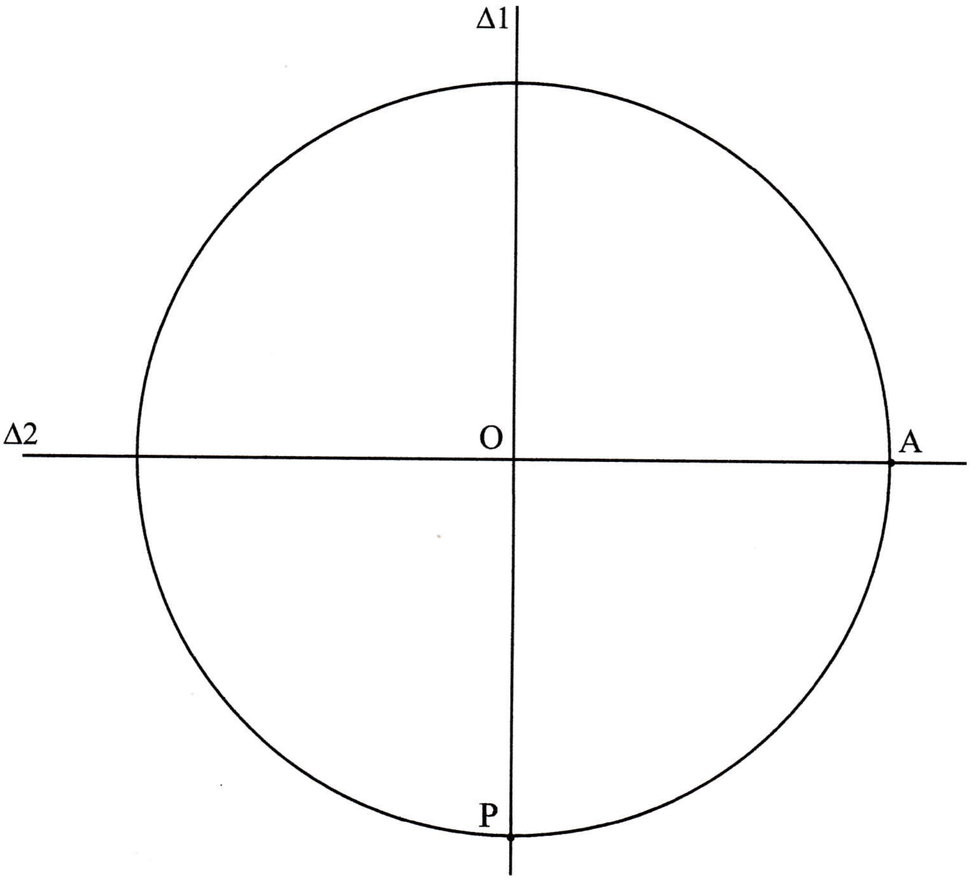
D'où OA = OP = R

Julien est bien content. Il a planté un piquet en P *pour attacher sa biquette, et un écriteau en* A *sur lequel est écrit : « Je reviens de suite, je vais chercher la corde ». Le dinosaure s'en fout, il ne sait pas lire.*

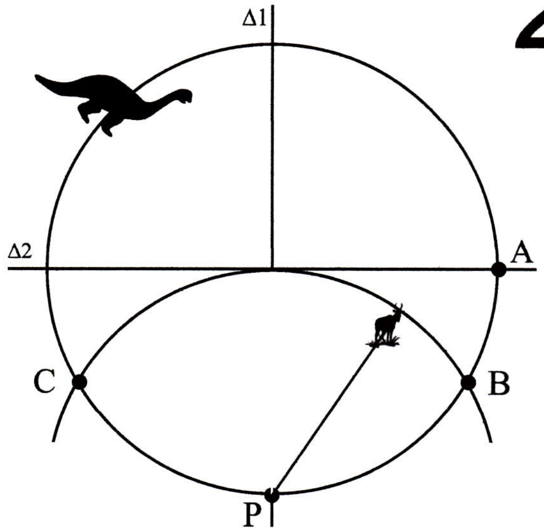
Mais au fait, il en prendra combien, de corde ? That is the question (comme disait Shakespeare).

Nous allons l'aider à en prendre assez, mais pas trop.

Etablissons donc un **domaine de validité.**



DOMAINE DE VALIDITE



Si L = 0, la chèvre ne pourra rien brouter.
Elle ne pourra que manger le piquet, ou mourir de faim.

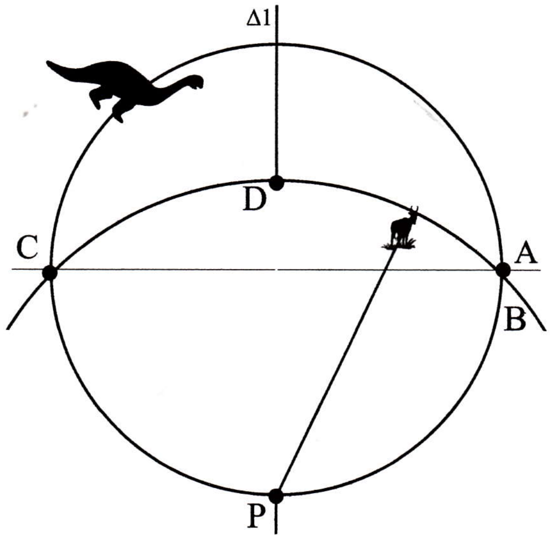
Si L = 2R, la chèvre pourra brouter TOUT le champ.
Elle s'en fera péter la panse, et Julien ne sera pas content.

D'où : $0 < L < 2R$ - Réduisons ce domaine de validité.

Si L = R, la chèvre pourra brouter A L'INTERIEUR de la moitié du champ, mais pas la moitié complète.
Traçons un arc de cercle de centre P et de rayon R coupant le cercle O respectivement en B et C.
La biquette ne crèvera pas de faim, mais elle n'aura pas son comptant. Brigitte Bardot sera obligée de vendre son âne castré pour racheter la chèvre de Julien Clerc. Pas de ça chez nous.

D'où : $R < L$

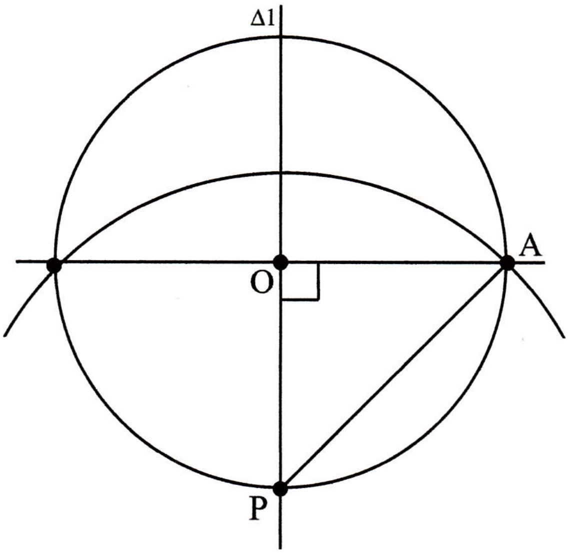
Si L = PA, la chèvre pourra brouter TOUTE LA MOITIE du champ, PLUS une partie qui se trouve au-dessus.
Traçons un arc de cercle de centre P et de rayon PA. Le point B se trouve confondu avec le point A. Soit D le point d'intersection de l'arc et de Δ1.
La biquette va se goinfrer, mais le dinosaure risque de bouffer la chèvre par inadvertance, Brigitte risque de castrer le dinosaure, Julien risque de nous chanter son désespoir. Pas de ça chez nous.



D'où : $L < PA$
Donc : $R < L < PA$

Du temps que Julien Clerc choisisse la corde, calculons PA.
Virons les herbivores du champ, une belle histoire d'amour peut en résulter, DARWIN en fera une jaunisse posthume.

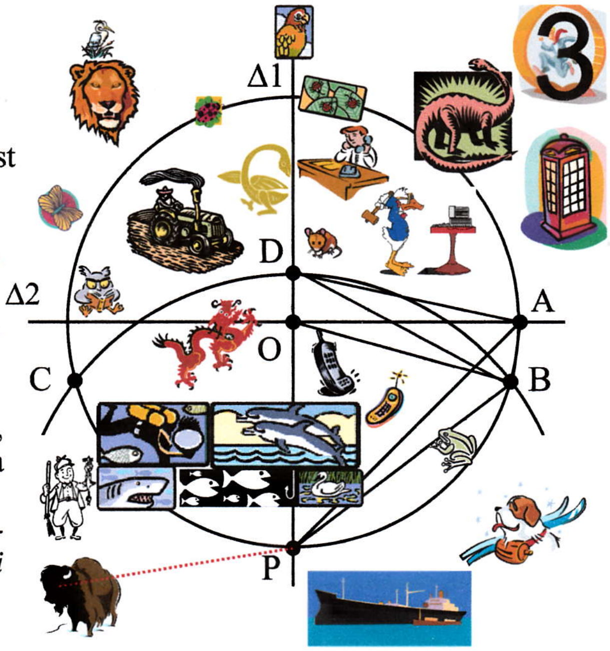
Traçons PA, OP et OA
Considérons le triangle POA
Par construction, OP = OA = R, l'angle POA est droit, d'où le triangle POA est un triangle rectangle isocèle.
D'où (si l'on en croit le bon vieux Pythagore), $PA^2 = OA^2 + OP^2$
Soit, après réduction :
$PA = \sqrt{(2R^2)}$
D'où l'on détermine le domaine de validité :
(1) $R < L < R\sqrt{(2)}$



Nous pressentons que la longueur exacte de la corde se situe aux alentours de la moyenne de ces deux bornes.

Soit $L \approx (R+R\sqrt{2})/2$
Soit, après réduction et conversion:
(2) $L \approx 1{,}207\ R$
Si l'on ne cherche pas la petite bête, le problème est quasiment résolu.
Mais, en l'absence des grosses bêtes (la chèvre, le dinosaure et Julien Clerc), sus à la p'tite bébête.

Traçons le cercle O de rayon R avec ses axes et ses points précédemment définis.
Du point P, traçons l'arc de cercle de rayon 1,207 R.
Reportons sur cette figure les points caractéristiques précédemment définis.

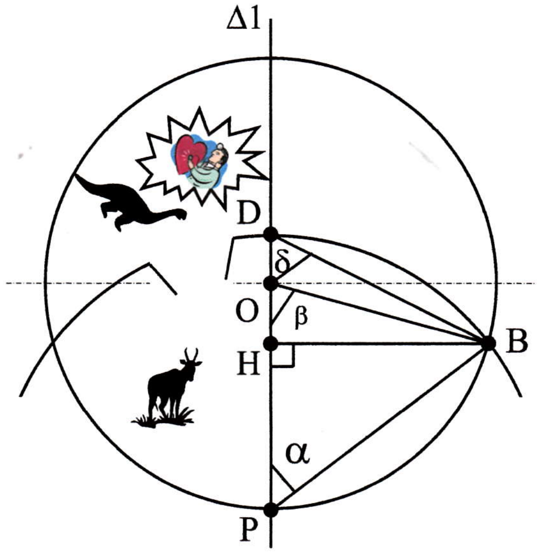


Examinons attentivement cette figure: Par construction, l'axe Δ1 est un axe de symétrie.

En vertu des pouvoirs que nous confèrent les mathématiques, nous décrétons ce champ comme étant trigonométrique.
De plus, nous ne chercherons la petite bête que dans une moitié de la moitié du champ, celle incluant le point B.

Quelques éléments constitutifs de la figure ci-jointe, tels que l'axe Δ2, le point A et d'autres détails ne semblent pas indispensables pour la suite des calculs. Supprimons-les.
Julien Clerc va sans doute gueuler, on lui vire sa biquette, on lui déclasse son patrimoine, on y en pique la moitié et on aseptise ce qui reste. On s'en fout, j'ai coupé la sono.

Traçons un cercle O de rayon R, une droite Δ1 passant par O et coupant le cercle en P.
De P, traçons un arc de cercle de rayon 1,207 R coupant le cercle O en B.
Traçons BD
Traçons BO
Traçons BP
Traçons une perpendiculaire à Δ1 issue de B. Soit H le point d'intersection.
Soit α l'angle DPB
Soit β l'angle POB
Soit δ l'angle PDB

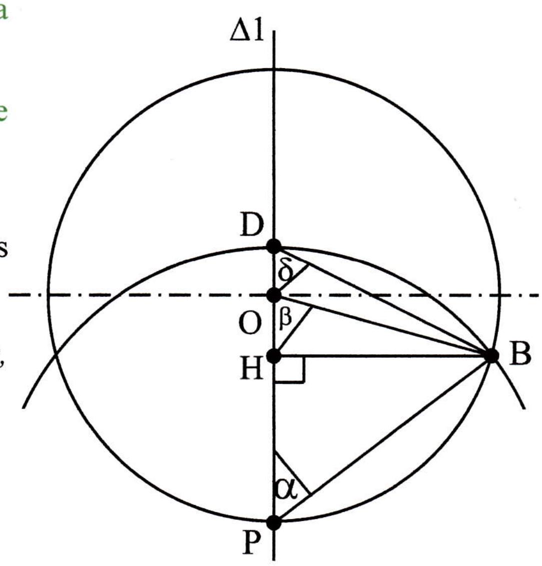


Par construction, OB = OP = R
PB = PD = L

La corde L ne pouvant avoir qu'une seule longueur, nous en déduisons que l'angle α est constant, raison pour laquelle nous raisonnerons parfois en considérant le cercle O comme étant trigonométrique.
Comme nous ne travaillons plus que sur la moitié droite du champ, nous avons parqué la biquette et le dino à gauche.

Dernière minute : *Nous avons faxé la longueur approximativement exacte de la corde à Julien, et la postière, bavarde comme une pie, a ameuté tout son fan-club régional, ce qui fait que ce grand artiste est actuellement coincé par une foule d'admirateurs annoncée comme immense par son attaché de presse, comptabilisée à 7 adultes, 3 adolescents, 5 enfants et 1 bébé par les forces de l'ordre impliquées dans le plan Vigie-Pirate.*

Après un bon coup de balai, nous obtenons la figure ci-contre qui va nous servir de base.

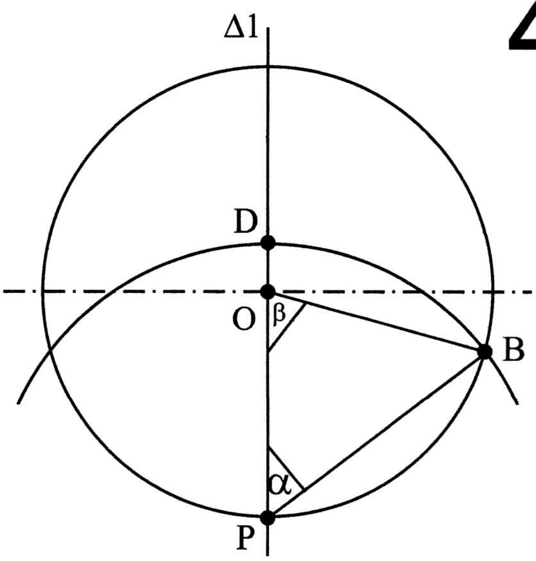


L'angle α étant constant, il nous suffit de le calculer pour résoudre le problème.

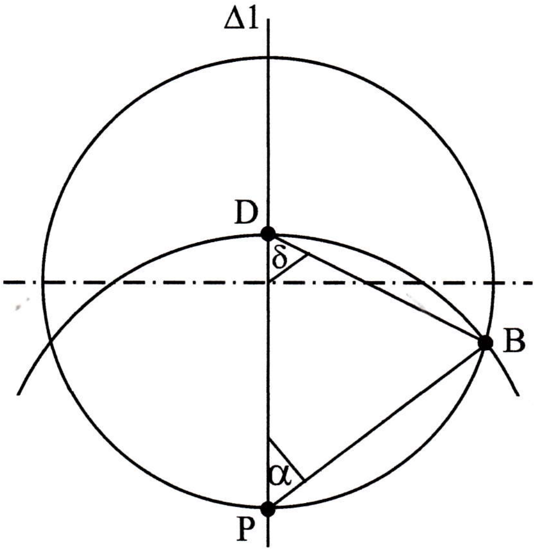
Avant de récapituler tous les éléments en notre possession, calculons l'angle β, l'angle δ la valeur BH

Julien Clerc nous ayant averti que ses fans ne veulent pas le lâcher, nous remettons à demain, ou plutôt à la page suivante, cet exercice.

Calcul de l'angle β :
Considérons le triangle POB
Par construction, OP = OB = R
Donc, le triangle est isocèle
D'où l'angle OBP est égal à l'angle OPB, soit α (radians)
Donc :
$\beta = \pi - 2\alpha$
La présidente du fan-club local de Julien Clerc prépare une manif de protestation sous prétexte que nous maltraitons les animaux, que nous perturbons l'écologie en plantant des angles étrangers dans un champ rond, et, plus grave, que nous avons coupé la sono.



Calcul de l'angle δ :
Considérons le triangle PDB
Par construction, PD = PB = L
Donc, le triangle est isocèle
D'où l'angle PDB est égal à l'angle PBD
Donc δ (en radians) :
$\delta = (\pi - \alpha) / 2$
Nous avons rangé les angles pendant que le secrétaire de Julien Clerc se rongeait les ongles.
La présidente du fan-club prépare ses panneaux, préparons notre tableau.
Afin d'arrondir les angles, prenons de la hauteur pour calculer le sommet en s'appuyant sur la base (à pile la moitié, c'est la démocratie directe). Mais pas de politique, pas de ça chez nous.



Calcul de BH = $f(\alpha, L)$
Considérons le triangle HBP
Par construction, PB = L
L'angle H est droit
D'où : BH = PB.sin(α)
Donc : BH = L.sin(α)

Calcul de BH = $f(\beta, R)$
BH = OB.sin(β)
D'où : BH = R.sin(π-2α)
Donc : L.sin(α) = R.sin(π-2α)
Soit :
(3) L = R.sin(π-2α) / sin(α)

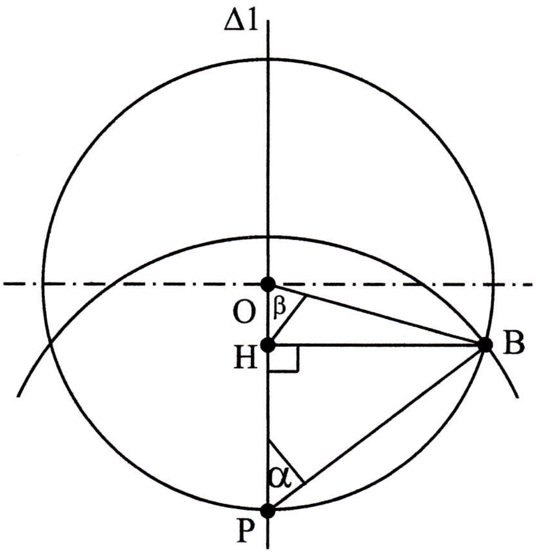
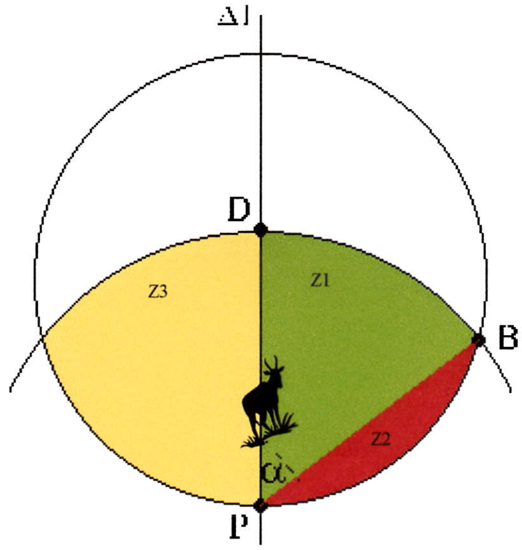


TABLEAU
Résumons les points acquis :
α constant
$R < L < R\sqrt{(2)}$
PO = PB = R
PB = PD = L
BH = R.sin(π-2α)
$\beta = \pi - 2\alpha$
Pauvre Julien ! Il voulait baptiser son champ : « Chez Seguin », et nous on l'appelle PO.ALPHA.BETA.R.L. Positivement inhumain.

Examinons la figure ci-contre:

Nous avons découpé l'aire de broutage (soit la moitié de la surface du champ) en trois zones, respectivement Z1 (la verte), Z2 (la rouge) et Z3.



Par hypothèse et construction :
$Z1 + Z2 + Z3 = (\pi R^2) / 2$
$Z1 + Z2 = Z3 = (\pi R^2) / 4$

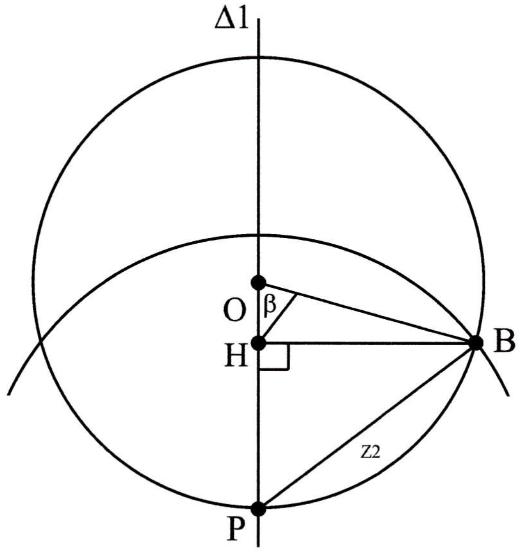
Nous allons calculer :
$Z1 = f(\alpha, R)$
$Z2 = f(\alpha, R)$

Pauvre Julien ! En plus du reste, v'là qu'on y tague son champ.

La chevrette, coquette, aussi menteuse que ma belle-mère, ayant raconté au Dino qu'elle était arrière petite-fille du dernier bouc Mascotte de la Légion Etrangère (et que c'est même pour ça que le champ est vert et rouge), le Dino a passé son brevet de Para en décidant que la zone Z3 était une Drop-Zone idéale. Amour, quand tu nous tiens ...

Rappelons que nous travaillons en radians.

Calcul de la surface Z1 tel que $Z1 = f(\alpha, R)$
$Z1 = [(\pi L^2)/2\pi]\alpha$
Soit : $Z1 = \alpha L^2 / 2$
D'où :
(4) $Z1 = \alpha\{[R.\sin(\pi-2\alpha) / \sin(\alpha)]^2\} / 2$ *(Vous suivez ?)*



Calcul de la surface Z2 tel que $Z2 = f(\alpha, R)$
Calculons la surface T1 du triangle OBP
Nous avons :
$OP = R$
$BH = R.\sin(\pi-2\alpha)$
D'où : $T1 = BH.(OP)/2$
Donc :
(5) $T1 = R^2.\sin(\pi-2\alpha) /2$ *(Vous suivez toujours ?)*

Calculons la surface S2 du secteur de cercle O défini par β
Nous avons :
$OP = OB = R$
$\beta = \pi - 2\alpha$
D'où :
$S2 = [(\pi R^2)/2\pi]\ \beta = \beta R^2 / 2$
Donc :
(6) $S2 = R^2.(\pi-2\alpha) / 2$ *(Là, c'est fastoche)*

Le secteur de cercle β est constitué par le triangle OBP **plus** la zone Z2
D'où :
$Z2 = S2 - T1$
Donc :
(7) $Z2 = R^2.(\pi-2\alpha-\sin(\pi-2\alpha) / 2$ *(Cest pas beau, ça ?)*

Quand Julien va savoir que son champ est si compliqué, il va bouffer la biquette et refiler cette saloperie aux chiffonniers d'Emmaüs.
Le Dinosaure, ignorant ces sombres desseins, a passé un doctorat de mathématiques supérieures pour faire découvrir à sa belle les beautés cachées de cet habitat exceptionnel.
La biquette s'en fout, elle broute.

Il est temps de faire le point :

Darwin a déposé plainte contre Dino sous prétexte que celui-ci a contrevenu aux lois de l'évolution.
Brigitte Bardot a ouvert une souscription pour payer les honoraires de Maître Vergès, défenseur.
La Légion Etrangère envisage de faire défiler Dino le 14 Juillet devant le Chapeau Chinois.
La biquette est tombée amoureuse de l'âne castré de Brigitte Bardot.
Le dinosaure prépare une thèse sur l'évolution des mœurs des fourmis rouges en Alaska.

Par hypothèse et construction :
$Z1 + Z2 = \pi R^2/4$
Reportons les valeurs calculées de $Z1 = f(\alpha, R)$ et de $Z2 = f(\alpha, R)$
Nous obtenons :
$|\alpha\{[R.\sin(\pi-2\alpha) / \sin(\alpha)]^2\} / 2| + |R^2.(\pi-2\alpha-\sin(\pi-2\alpha) / 2| = \pi R^2 / 4$
Le cercle étant trigonométrique, R = 1
Ceci nous permet d'alléger l'égalité ci-dessus.
$|\alpha\{[\sin(\pi-2\alpha) / \sin(\alpha)]^2\} / 2| + |(\pi-2\alpha-\sin(\pi-2\alpha) / 2| = \pi / 4$
Soit :
$|\alpha\{[\sin(\pi-2\alpha) / \sin(\alpha)]^2\} / 2| + |(\pi-2\alpha-\sin(\pi-2\alpha) / 2| = \pi / 4$

Donc :

(8) $|\alpha\{[\sin(\pi-2\alpha) / \sin(\alpha)]^2\} / 2| + |(\pi-2\alpha-\sin(\pi-2\alpha) / 2| - (\pi / 4) = 0$

Cette expression peut, certes se simplifier. Essayez !

Le Dino n'en a fait qu'une bouchée, la chèvre s'en fout.
Julien ignore tout de la situation, tant mieux pour lui.

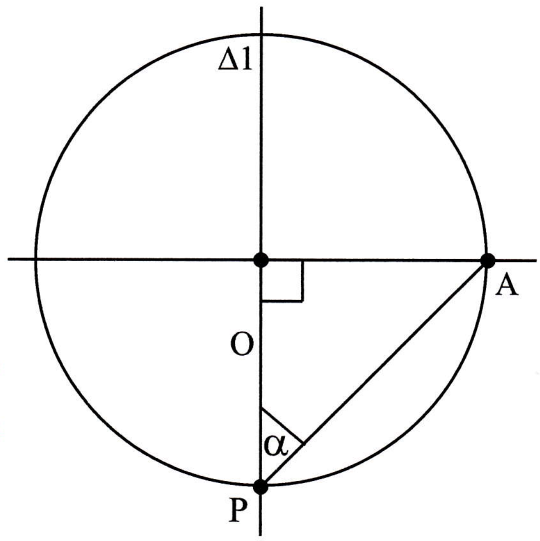
METHODE :

Il existe une valeur, et une seule, de l'angle α pour résoudre l'équation ci-dessus.
Nous allons déterminer cette valeur par itération.

En se rapportant au domaine de validité, nous savons que la borne inférieure correspond à la corde la plus longue.

Calculons la plus petite valeur que puisse adopter l'angle α

Nous avons déjà déterminé que le triangle POA est isocèle-rectangle.



D'où :
$\alpha = \{\pi-(\pi/2)\} / 2$
Donc :
$\alpha = \pi / 4$
Soit, en arrondissant à la décimale supérieure :
$\alpha \approx 0.79$ radians

Nous donnerons en exemple un algorithme permettant d'effectuer ce calcul itératif.
Nous donnerons également en annexe le listing détaillé et commenté sous Q-Basic dont nous nous sommes servi.

A ce stade, bon nombre d'autres solutions sont possibles, nous avons choisi celle-ci pour sa simplicité, mais rien ne vous empêche d'en adopter une autre.

Julien Clerc étant sur le chemin du retour, rangeons vite son chant (pardon, son champ), nous mesurerons ensemble la corde sur la page suivante.
Dino trouve que, en définitive, la Z3 n'est pas terrible, il préfère Calvi et son pouf où les nanas sont plus sympas.

ANNEXE A

$$|\alpha\{[\sin(\pi-2\alpha) / \sin(\alpha)]^2\} / 2| + |(\pi-2\alpha-\sin(\pi-2\alpha) / 2| - (\pi / 4) = 0$$

METHODE :

Nous allons appliquer la valeur : $\alpha = 0{,}79$ dans l'expression et calculer celle-ci.
L'angle étant trop petit, la surface sera trop grande, donc, l'expression sera positive.

Nous incrémenterons l'angle d'une petite valeur, et recalculerons l'expression.
Si l'expression est toujours positive, nous recommencerons le cycle jusqu'à ce que l'expression devienne négative.

A ce moment-là, nous considèrerons la pénultième valeur de l'angle.
Nous recommencerons le cycle avec un incrément plus petit.

Puis nous recommencerons et recommencerons encore en diminuant la valeur de l'incrément jusqu'à obtenir une valeur d'expression aussi proche de zéro que la détermination de la précision souhaitée (le nombre de décimales) le permet.

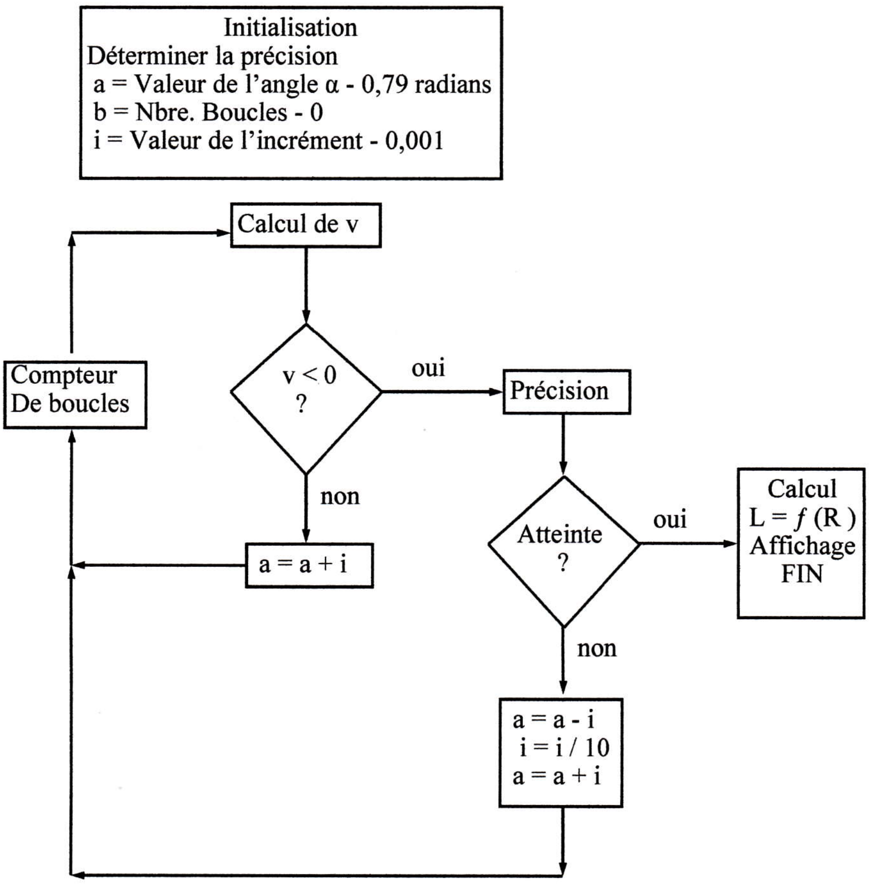
A ce stade, nous reportons cet angle dans l'expression (3) et le tour est joué.

Il était temps, car les C.R.S. prennent position autour du champ pour éviter tout débordement lors de la manif écolo organisée par la Présidente du fan-club local, la chevrette brame à tue-tête toutes les chansons d'Amour qu'elle connaît (elle connaît tout le répertoire de Julien Clerc) afin d'attendrir l'âne de Brigitte Bardot (lequel n'en a rien à cirer), ce qui rend les C.R.S. nerveux malgré les protèges-oreilles renforcés modèle anti-émeute.

Pas le moment de traîner dans le coin. Un mauvais coup est si vite arrivé !

Le Dinosaure a écopé de soixante jours à la suite d'une bagarre avec les Sous-Off du 2ème R.E.P. consécutive à une partie de 421 où, en toute honnêteté, il semble impossible de savoir qui a triché le plus.

Pauvre Julien !



ANNEXE B

$$|\alpha\{[\sin(\pi-2\alpha) / \sin(\alpha)]^2\} / 2| + |(\pi-2\alpha-\sin(\pi-2\alpha) / 2| - (\pi / 4) = 0$$

Discours de la méthode: *(Ça ne vous rappelle rien ?)*

Il est évident que l'expression ci-dessus est monstrueuse, et que des simplifications seraient bienvenues.

Pourtant, nous garderons cette forme peut-être par paresse, mais peut-être aussi parce que l'exercice de style consistant à réduire l'expression n'apporterait rien au niveau du raisonnement, à moins d'utiliser une bonne vieille table trigonométrique et se farcir les boucles manuellement. Ne soyons pas masochistes.

L'organigramme donné en ANNEXE A n'est qu'un exemple facilement modifiable.
Le compteur de boucle, en particulier, est superfétatoire, mais ça fait joli.

D'autres méthodes pour calculer la valeur de l'angle α existent, de même qu'il existe la possibilité d'utiliser d'autres angles de références, voire des raisonnements différents (essayez le calcul intégral, ce n'est pas triste).

Nous fournissons un listing en Q-Basic utilisant l'organigramme ci-dessus tracé.
Pourquoi en Q-Basic ?
Par nostalgie peut-être, mais aussi par souci de simplicité. Les systèmes de calcul moderne nous font ch...

```
10 CLS
20 pi = 3.141592654#
25 b = 0
30 a = .78
40 i = .01
50 a = a + i
55 b = b + 1
60 q1 = SIN(pi - (2 * a))
70 q2 = SIN(a)
80 q3 = q1 / q2
90 q4 = (q3 * q3 / 2) * a
100 q5 = (pi - (2 * a) - SIN(pi - (2 * a))) / 2
110 q6 = q5 - (pi / 4)
120 v = q4 + q6
130 IF v < .0000001# AND v > 0 THEN GOTO 300
140 IF v > 0 THEN GOTO 50
150 a = a - i: i = i / 10
160 GOTO 50
300 l = SIN(pi - (2 * a)) / (SIN(a))
302 PRINT : PRINT "     Il y a eu :"; b; "boucles"
305 FOR f = 1 TO 6: PRINT : NEXT
310 PRINT "     Solution : L ="; l; "R": PRINT
320 PRINT "     C'est Julien qui va être content !": END
```

RESULTAT :

Il y a eu : 50 boucles
L = 1,158728...R
C'est Julien qui va être content !

Ainsi se termine l'histoire.
Remarquons que 1,158728 n'est pas très éloigné des 1,207 calculés en (2)

Dernières nouvelles: *Le Commandant des C.R.S. est tombé amoureux de la Présidente du fan-club local, la chèvre est tombée amoureuse des bottes d'un jeune C.R.S. (ancien chevrier).*
Le Dinosaure s'est converti à l'Islam. Quand on lui a demandé pourquoi,, il a simplement répondu:Polygamie.
Julien Clerc s'est lancé dans l'aviculture.
